УДК 629.1.01 http://dx.doi.org/10.31473/2305-5987-2021-1-29(43)-5

АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФРИКЦІЙНИХ АВТОКОЛИВАНЬ У СИСТЕМАХ З ДВОМА СТУПЕНЯМИ СВОБОДИ

Калінін Є., д-р техн. наук, проф.,
e-mail: kalinin.kpi.kharkov.ua@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6191-8446
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,
Лебедєв С., канд. техн. наук,
e-mail: hfukrndipvt@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-3067-5135
Козлов Ю.,
e-mail: urgenurgen@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-3546-0010
Харківська філія УкрНДІПВТ ім. Л. Погорілого

Анотація

Мета дослідження *– вивчення властивостей фрикційних автоколивань у системах із двома ступенями свободи.*

Методи дослідження. *Методом дослідження обраний узагальнений Г. Бояджиєвим на випадок багаточастотних коливань асимптотичний метод Н. Н. Боголюбова та Ю. А. Митропольського. Методологічною основою роботи є узагальнення та аналіз відомих наукових результатів відносно динаміки систем в режимах резонансів та використання системного підходу. Для формування наукової проблеми, визначення мети і постановки задач дослідження використовувався аналітичний метод та порівняльний аналіз. При створенні емпіричних моделей використані основні положення теорії стійкості систем, методології системного аналізу та дослідження функцій.*

Результати дослідження. *Розглянуто систему з двома ступенями свободи, припускаючи, що функція тертя апроксимована кубічним поліномом від швидкості ковзання, причому тертя прикладено лише до однієї з мас. Виняток рівномірного обертання, що відповідає третьому ступеню свободи, призводить до розгляду не моменту сил тертя, а різниці між моментом сил тертя і моментом рухомих сил.*

З аналізу результатів розв'язків рівняння можна зробити висновок, що з точністю до першого наближення включно автоколивання відбуваються з постійними частотами, які дорівнюють власним частотам системи. Це збігається із висновками інших авторів, отриманими з використанням інших методів.

Знайдено стаціонарні значення амплітуд. Можливі такі чотири випадки: тривіальний розв'язок, який відповідає рівномірному обертанню системи без коливань; одночастотні коливання з першою частотою; одночастотні коливання з другою частотою; двочастотний коливальний режим.

Висновок. *Метод Г. Бояджиєва може бути застосований для дослідження багатомасових автоколивальних систем і дає їхній загальний розв'язок у вигляді асимптотичних розкладів до будь-якого ступеня точності.*

Отримані умови стійкості стаціонарних режимів підтверджують експериментальні результати, що у багатомасових системах автоколивання можливі лише на спадних ділянках характеристик тертя.

Характер коливань, які розвиваються – їхня частотність і співвідношення амплітуд складових гармонік – цілком визначається структурою системи, її пружними та інерційними властивостями.

Ключові слова: *механічна система, автоколивання, ступені вільності, резонансний режим*

Вступ. Фрикційні автоколивання, тобто коливання, які збуджуються нелінійними силами тертя, зустрічаються практично в усіх машинах і конструкціях, які мають пари тертя. У цей час налічується велика кількість публікацій, присвячених їхньому вивченню, накопичені важливі відомості про їхню природу, залежно від різних факторів, та методи усунення. Однак, як правило, при цьому розглядаються автоколивання у системах з одним ступенем свободи.

Найбільш повно вивчені класичні задачі про коливання пружно закріпленого вантажу, який лежить на нескінченній стрічці, яка рухається [Каудерер, 1961], автоколивання в механічних передачах силових установок енергетичних і транспортних машин [Штейнвольф, 1966; Калінін, 2016; Кутьков, 1980; Калінін, 2015; Барский, 1973; Калінін, 2016; Ovsyannikov, 2018] і деякі інші завдання, які, як вже зазначено, також вивчаються за одного ступеня свободи.

Разом з тим, приведення розрахункових схем до одномасових значно збіднює картину поведінки останніх у порівнянні з фізичною картиною реальних процесів, яка не пояснює деякі явища, які спостерігаються насправді.

Дослідження фрикційних автоколивальних систем з числом ступенів свободи, більшим за одиницю, почалося лише останніми роками. Н.Д. Сальникова [Сальников, 1968], розглядаючи систему з двома ступенями свободи, застосовує кусково-лінійну апроксимацію характеристики тертя як двох відрізків прямої, кутовий коефіцієнт якої відповідає крутості спадаючої гілки характеристики поблизу точки екстремуму. Наявність висхідних гілок ігнорується. Л. І. Штейнвольф [Штейнвольф, 1966], вважаючи момент сил тертя функцією лише середньої швидкості обертання, зводить обчислювальну схему двомасової системи до алгоритму розрахунку одномасової.

Постановка завдань. Метою роботи є вивчення властивостей фрикційних автоколивань у системах із двома ступенями свободи.

Методи і матеріали. Методом дослідження обраний узагальнений Г. Бояджиєвим [Бояджиев, 1965] на випадок багаточастотних коливань асимптотичний метод Н. Н. Боголюбова та Ю. А. Митропольського. Методологічною основою роботи є узагальнення та аналіз відомих наукових результатів відносно динаміки систем в режимах резонансів та використання системного підходу. Для формуванні наукової проблеми, визначення мети і постановки задач дослідження використовувався аналітичний метод та порівняльний аналіз. Створюючи емпіричні моделі, були використані основні положення теорії стійкості систем, методології системного аналізу та дослідження функцій.

Результати. Розглянемо систему з двома ступенями свободи (рис. 1), припускаючи, що функція тертя (рис. 2) апроксимована кубічним поліномом від швидкості ковзання, причому тертя прикладено лише до однієї з мас. Виняток рівномірного обертання, що відповідає

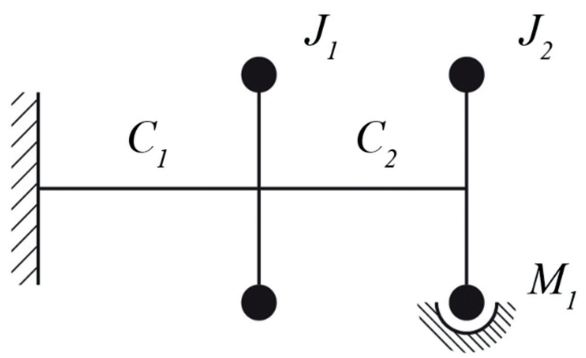

Рисунок 1 – Динамічна модель системи, яка розглядається

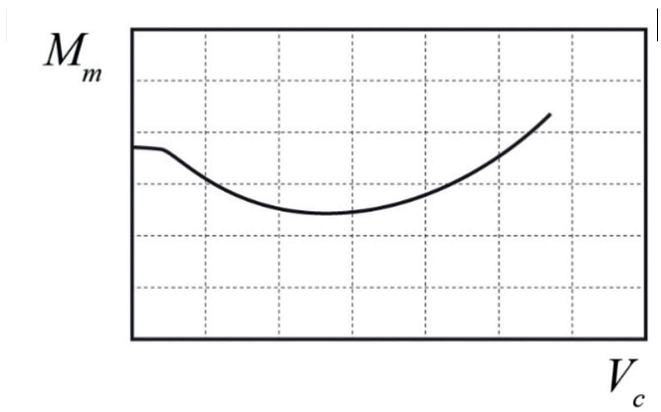

Рисунок 2 – Загальний вигляд функції тертя

третьому ступеню свободи, призводить до розгляду не моменту сил тертя, а різниці між моментом сил тертя і моментом рухомих сил і вводить малий параметр множником за цієї різниці.

Рух системи описується таким диференціальними рівняннями:

$$\ddot{\alpha}_1 + \frac{c_1}{J_1}\alpha_1 - \frac{c_2}{J_1}\alpha_2 = 0;$$

$$\ddot{\alpha}_2 - \frac{c_1}{J_1}\alpha_1 + \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)c_2\alpha_2 = -\varepsilon\big[f_0 - \qquad (1)$$

$$- f_1(\omega_0 + \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) + f_2(\omega_0 + \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2)^3\big],$$

де c_1, c_2 – крутильні жорсткості відповідних ділянок валу;

J_1, J_2 – моменти інерції приведених махових мас;

f_0, f_1, f_2 – позитивні коефіцієнти, які характеризують пару тертя і умови тертя;

ω_0 – швидкість рівномірного обертання системи.

Розв’язок системи (1) шукаємо у вигляді ряду за ступенями ε:

$$\alpha_1 = \alpha_{i0} + \varepsilon\alpha_{i1}(\alpha_1, \alpha_2, \psi_1, \psi_2) +$$
$$+ \varepsilon^2\alpha_{i2}(\alpha_1, \alpha_2, \psi_1, \psi_2) + \ldots,\ (i = 1,2), \qquad (2)$$

де

$$\alpha_{10} = \alpha_1\cos\psi_1 + \alpha_2\cos\psi_2;$$
$$\alpha_{20} = \alpha_1 k_1\cos\psi_1 + \alpha_2 k_2\cos\psi_2, \qquad (3)$$

а розв’язок породжувальної системи (за $\varepsilon = 0$) – $\psi_i = \omega_i t + \varphi_i$, $k_i = \dfrac{c_1 - J_1\omega_i^2}{c_2}$, $i = 1,2$,

де α_{i1}, α_{i2}... – періодичні за ψ_1, ψ_2, функції з періодом 2π, причому α_i, ψ_i як функції часу визначаються диференціальними рівняннями

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \varepsilon A_{i1}(\alpha_1, \alpha_2) + \varepsilon^2 A_{i2}(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots;$$
$$\frac{d\psi_i}{dt} = \omega_i + \varepsilon B_{i1}(\alpha_1, \alpha_2) + \varepsilon^2 B_{i2}(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots \qquad (4)$$

Завдання полягає у визначенні функцій α_{i1}, α_{i2}... і A_{i1}, A_{i2}..., B_{i1}, B_{i2}... так, щоб система розв’язків (2) задовольняла, з певним ступенем точності, систему рівнянь (1) завжди за α_i, ψ_i (i = 1,2), яка відповідає умовам (4) з тим же ступенем точності.

Підставляючи (2) з урахуванням (3) і (4) в систему (1) і прирівнюючи коефіцієнти за однакових ступенів можна отримати рівняння, які відповідають нульовому, першому, другому і т. д. наближенням. Нульовим наближенням є розв’язок (3) породжувальної системи. Для першого наближення маємо:

$$\left(\omega_1\frac{\partial}{\partial\psi_1} + \omega_2\frac{\partial}{\partial\psi_2}\right)^2\alpha_{11} + \frac{c_1}{J_1}\alpha_{11} - \frac{c_2}{J_1}\alpha_{21} = 2\omega_1(A_{11}\sin\psi_1 +$$
$$+\alpha_1 B_{11}\cos\psi_1) + 2\omega_2(A_{21}\sin\psi_2 + \alpha_2 B_{21}\cos\psi_2);$$
$$\left(\omega_1\frac{\partial}{\partial\psi_1} + \omega_2\frac{\partial}{\partial\psi_2}\right)^2\alpha_{21} - \frac{c_1}{J_1}\alpha_{11} + \left(\frac{c_2}{J_1} + \frac{c_2}{J_2}\right)\alpha_{21} = \qquad (5)$$
$$= 2k_1\omega_1(A_{11}\sin\psi_1 + \alpha_1 B_{11}\cos\psi_1) +$$
$$+ 2k_2\omega_2(A_{21}\sin\psi_2 + \alpha_2 B_{21}\cos\psi_2) - f_0 + f_1(\omega_0 -$$
$$-b_1\sin\psi_1 - b_2\sin\psi_2) - f_2(\omega_0 - b_1\sin\psi_1 - b_2\sin\psi_2)^3.$$

Тут для стислості позначено $b_i = \alpha_i\omega_i(1 + k_i)$, $(i = 1,2)$. Замінимо квадрати, куби та добутки синусів першими ступенями тригонометричних функцій. Після приведення подібних система (5) набуває вигляду:

$$\ddot{\alpha}_{11} + \frac{c_1}{J_1}\alpha_{11} - \frac{c_2}{J_1}\alpha_{21} = 2\omega_1(A_{11}\sin\psi_1 +$$
$$+ \alpha_1 B_{11}\cos\psi_1) + 2\omega_2(A_{21}\sin\psi_2 + \alpha_2 B_{21}\cos\psi_2);$$
$$\ddot{\alpha}_{21} - \frac{c_1}{J_1}\alpha_{11} + \left(\frac{c_2}{J_1} + \frac{c_2}{J_2}\right)\alpha_{21} =$$
$$= \left[f_0 + f_1\omega_0 - f_2\omega_0(\omega_0^2 + \frac{3}{2}b_1^2 + \frac{3}{2}b_2^2)\right] +$$
$$+ \left[2\omega_1 k_1 A_{11} - f_1 b_1 + \frac{3}{4}f_2 b_1^3 + \right. \qquad (6)$$
$$\left. + 3f_2\omega_0^2 b_1 + \frac{3}{2}f_2 b_1 b_2^2\right]\sin\psi_1 +$$
$$+ \left[2\omega_2 k_2 A_{21} - f_1 b_2 + \frac{3}{4}f_2 b_2^3 + \right.$$
$$\left. + 3f_2\omega_0^2 b_2 + \frac{3}{2}f_2 b_1^2 b_2\right]\sin\psi_2 + 2\alpha_1 k_1\omega_1 B_{11}\cos\psi_1 +$$
$$+2\alpha_2 k_2\omega_2 B_{21}\cos\psi_2 - \frac{1}{4}f_2 b_1^3\sin 3\psi_1 -$$

$$-\frac{1}{4}f_2 b_2^3\sin 3\psi_2+\frac{3}{2}f_2\omega_0 b_1^2\cos 2\psi_1+$$
$$+\frac{3}{2}f_2\omega_0 b_2^2\cos 2\psi_2-\frac{3}{4}f_2 b_1^2 b_2\sin(2\psi_1+\psi_2+$$
$$+\frac{3}{4}f_2 b_1^2 b_2\sin(2\psi_1-\psi_2)-\frac{3}{4}f_2 b_1 b_2^2\sin(\psi_1+2\psi_2)- \qquad (6)$$
$$-\frac{3}{4}f_2 b_1 b_2^2\sin(\psi_1-2\psi_2)-3f_2\omega_0 b_1 b_2\cos(\psi_1-\psi_2)+$$
$$+3f_2\omega_0 b_1 b_2\cos(\psi_1+\psi_2).$$

Умовою відсутності резонансу у системі (6) є виконання рівності виду $\frac{c_1}{J_1}(F_1+F_2)+\ddot{F}_2=0$, де $F_1,\ F_2$ – резонувальні члени у правих частинах відповідно першого та другого рівнянь системи (6). Ця умова дає такі рівняння:

$$
\begin{aligned}
&2\omega_1 A_{11}\left[(k_1+1)\frac{c_1}{J_1}-k_1\omega_1^2\right]-\\
&-\left(\frac{c_1}{J_1}-\omega_1^2\right)\left[f_1 b_1-3f_2 b_1\left(\omega_0^2+\frac{b_1^2}{4}+\frac{b_2^2}{4}\right)\right]=0;\\
&2\omega_2 A_{21}\left[(k_2+1)\frac{c_1}{J_1}-k_2\omega_2^2\right]-\\
&-\left(\frac{c_1}{J_1}-\omega_2^2\right)\left[f_1 b_2-3f_2 b_2\left(\omega_0^2+\frac{b_2^2}{4}+\frac{b_1^2}{4}\right)\right]=0;\\
&2a_1\omega_1 B_{11}\left[(k_1+1)\frac{c_1}{J_1}-k_1\omega_1^2\right]=0;\\
&2a_2\omega_2 B_{21}\left[(k_2+1)\frac{c_1}{J_1}-k_2\omega_2^2\right]=0,
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

які дають змогу визначити функції $A_{i1}(a_1,a_2),\ B_{i1}(b_1,b_2)\ (i=1,2)$:

$$
\begin{aligned}
&A_{11}(a_1,a_2)=q_1 a_1(p+b_1^2+2b_2^2);\\
&A_{21}(a_1,a_2)=q_2 a_2(p+2b_1^2+b_2^2);\\
&B_{11}=0;\\
&B_{21}=0,
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

де

$$p=\frac{4}{3f_2}(3f_2\omega_0^2-f_1);$$

$$q_i=\frac{3f_2 k_i c_2(1+k_i)}{2(c_1+k_i^2 c_2)},\ (i=1,2).$$

Підстановка (8) в (4) для розв'язків першого наближення дає:

$$
\begin{aligned}
&\frac{da_1}{dt}=\varepsilon q_1 a_1(p+b_1^2+2b_2^2);\\
&\frac{da_2}{dt}=\varepsilon q_2 a_2(p+2b_1^2+b_2^2);\\
&\frac{d\psi_1}{dt}=\omega_1;\\
&\frac{d\psi_2}{dt}=\omega_2.
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Останні два рівняння системи (9) доходять до невтішного висновку, що з точністю до першого наближення включно автоколивання відбуваються з постійними частотами, які дорівнюють власним частотам системи. Це збігається із висновками інших авторів, отриманими з використанням інших методів.

Обговорення. Прирівнюючи похідні нулю в перших двох рівняннях системи (9), знайдемо стаціонарні значення амплітуд. Можливі такі чотири випадки:

а) $a_{10}=a_{20}=0$ – тривіальний розв'язок, який відповідає рівномірному обертанню системи без коливань;

б) $a_{10}^2=-\frac{p}{\omega_1^2(1+k_1)^2},\ a_{20}=0$ – одночастотні коливання з частотою ;

в) $a_{10}=0,\ a_{20}^2=-\frac{p}{\omega_2^2(1+k_2)^2}$ – одночастотні коливання з частотою ;

г) $a_{10}^2=-\frac{p}{3\omega_1^2(1+k_1)^2},\ a_{20}^2=-\frac{p}{3\omega_2^2(1+k_2)^2}$ – двочастотний коливальний режим.

Зазначимо, що стаціонарні амплітуди $a_{i0}\ (i=1,2)$ двочастотних режимів у $\sqrt{3}$ разів менше відповідних амплітуд одночастотних режимів. За таких умов співвідношення амплітуд $\frac{a_1}{a_2}=\frac{\omega_2(a+k_2)}{\omega_1(a+k_1)}$ цілком визначається пружними та інерційними властивостями коливальної системи і не залежить ні від швидкості, ні від пари тертя.

Для дослідження стійкості стаціонарних розв'язків складемо рівняння у варіаціях, вважаючи, що $a_i = a_{i0} + h_i e^{\lambda t}$. Розкладемо праві частини рівнянь (9) у ряд Тейлора на околиці точки (a_{10}, a_{20}), обмежуючись, як і раніше, членами першого наближення. Після спрощень, отримаємо:

$$\begin{aligned} &h_1\lambda = \varepsilon q_1(p + 3b_{10}^2 + 2b_{20}^2)h_1 + \\ &+ 4\varepsilon q_1\omega_2^2(1+k_2)^2 a_{10}a_{20}h_1; \\ &h_2\lambda = \varepsilon q_2(p + 2b_{10}^2 + 3b_{20}^2)h_2 + \\ &+ 4\varepsilon q_2\omega_1^2(1+k_1)^2 a_{10}a_{20}h_1, \end{aligned} \qquad (10)$$

де $b_{i0} = a_{i0}\omega_i(1+k_i)$.

Підставимо в (10) стаціонарні амплітуди кожного режиму:

а)

$$h_i(\lambda - \varepsilon pq_i) = 0, \; i = 1,2. \qquad (11)$$

Для нетривіальності розв'язку необхідно, щоб $\lambda_i = \varepsilon pq_i$. Критерієм стійкості є умова $\lambda_i < 0$ ($i = 1,2$). Оскільки

$$pq_i = \frac{2c_2}{c_1 + k_i^2 c_2} k_i(1+k_i)(f_1 - 3f_2\omega_0^2),$$

то нульові амплітуди для систем з $k_i(1+k_i) > 0$ стійкі на швидкостях $\omega_0 > \frac{f_1}{3f_2}$ тобто на висхідній гілці характеристики тертя (рис. 2). Такі системи спостерігаються у трьох випадках: $k_1 > 0$, $k_2 > 0$; $k_1 > 0$, $k_2 < -1$; $k_1 < -1$, $k_2 < -1$. Для систем з $k_i(1+k_i) < 0$ (тобто для $-1 < k_i < 0$) нульові амплітуди стійкі на спадній гілці характеристики, а для систем з різними знаками величин $k_i(1+k_i)$, ($i = 1,2$) нульові амплітуди завжди нестійкі. Такі системи можливі за $-1 < k_1 < 0$, $k_2 < -1$ або за $-1 < k_2 < 0$, $k_1 > 0$.

б)

$$h_1(\lambda + 2\varepsilon pq_1) = 0, \; h_2(\lambda + 2\varepsilon pq_2) = 0. \qquad (12)$$

в)

$$h_1(\lambda + \varepsilon pq_1) = 0, \; h_2(\lambda + 2\varepsilon pq_2) = 0. \qquad (13)$$

З умови нетривіальності розв'язків цих систем маємо

$$\lambda_i = -\varepsilon pq_i, \; \lambda_j = -2\varepsilon pq_j. \; (i, j = 1,2; \; i \neq j). \qquad (14)$$

Для $\lambda_i < 0$ необхідно, щоб $pq_i > 0$. З урахуванням умови дійсності амплітуд ($p < 0$), отримаємо, що одночастотні режими стійкі тільки на спадних гілках характеристик тертя і тільки для систем з $k_i(1+k_i) > 0$ тобто для систем трьох класів: 1) $k_1 > 0$, $k_2 > 0$; 2) $k_1 > 0$, $k_2 < -1$; 3) $k_1 < -1$, $k_2 < -1$.

г)

$$\begin{aligned} &h_1\left(\lambda + \frac{2}{3}\varepsilon pq_1\right) + h_2\frac{4}{3}\varepsilon pq_1\frac{\omega_2(1+k_2)}{\omega_1(1+k_1)} = 0; \\ &h_1\frac{4}{3}\varepsilon pq_2\frac{\omega_1(1+k_1)}{\omega_2(1+k_2)} + h_2\left(\lambda + \frac{2}{3}\varepsilon pq_2\right) = 0. \end{aligned} \qquad (15)$$

Для ненульових h_1 та h_2 потрібно, щоб

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{2}{3}\varepsilon pq_1 & \frac{4}{3}\varepsilon pq_1\frac{\omega_2(1+k_2)}{\omega_1(1+k_1)} \\ \frac{4}{3}\varepsilon pq_2\frac{\omega_1(1+k_1)}{\omega_2(1+k_2)} & \lambda + \frac{2}{3}\varepsilon pq_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (16)$$

звідки

$$\begin{aligned} &\lambda_{12} = -\frac{\varepsilon p}{3}\Big[(q_1 + q_2) \pm \\ &\pm \sqrt{(q_1+q_2)^2 + 12q_1q_2}\Big]. \end{aligned} \qquad (17)$$

Для $\lambda_i < 0$ необхідно, по-перше, щоб $sign q_1 \neq sign q_2$, по-друге, щоб $q_1 + q_2 > 0$ за $p > 0$ і $q_1 + q_2 < 0$ за $p < 0$.. З урахуванням умов дійсності амплітуд ($p < 0$) отримаємо, що двочастотний режим стійкий тільки на спадних ділянках характеристик тертя і тільки для систем, що відповідають умовам:

1) $k_1(1+k_1) + k_2(1+k_2) > 0$;

2) $-1 < k_1 < 0$, $k_2 < -1$ чи $-1 < k_2 < 0$, $k_1 > 0$.

Висновки. Це дослідження дає змогу зробити такі висновки.

Метод Г. Бояджиєва може бути застосований для дослідження багатомасових автоколивальних систем і дає їхній загальний розв'язок у вигляді асимптотичних розкладів до будь-якого ступеня точності.

Отримані умови стійкості стаціонарних режимів підтверджують експериментальні результати, що у багатомасових системах автоколивання можливі лише на спадних ділянках характеристик тертя.

Характер коливань, які розвиваються – їхня частотність і співвідношення амплітуд складових гармонік – цілком визначається структурою системи, її пружними та інерційними властивостями.

Перелік літератури

Барский И. Б., Анилович В. Я., Кутьков Г. М. (1973) Динамика трактора. М.: Машиностроение. 280 с.

Бояджиев Г. (1965) Асимптотические решения на нелинейных системах при многочастотном режиме. Известия высших учебных заведений. Математика. 1. С. 35-43

Калінін Є. І., Романченко В. М. (2016) Оцінка міцності при дії локального навантаження на попередньо напружену безмоментну оболонку. Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів. 5. С. 167-172.

Калінін Є. І. (2015) Частотно-динамічна математична модель тракторного агрегату з передачею крутного моменту до рушіїв сільськогосподарської машини. Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка. 156. С. 327-334.

Калінін Є. І., Шуляк М. Л., Шевченко І. О. (2016) Дослідження перехідних процесів в коробці змінних передач мобільного енергетичного засобу. Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка. 168. С. 73-79.

Каудерер Г. (1961) Нелинейная механика. М.: Издательство иностранной литературы, 778 с.

Кутьков Г. М. (1980) Тяговая динамика тракторов. М.: Машиностроение. 216 с.

Сальникова Н. Д. (1968) К вопросу о фрикционных автоколебаниях в системах с конечным числом степеней свободы. Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 6. С. 15-22.

Штейнвольф Л. И. (1966) Динамика механических передач силовых установок тепловозов: дис. ... докт. техн. наук. Х., 517 с.

Ovsyannikov S., Kalinin E., Kolesnik I. (2018) Oscillation process of multi-support machines when driving over irregularities. Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport. pp. 307-317

References

Barskiy I. B., Anilovich V. Ya., Kutkov G. M. (1973) Tractor Dynamics. M.: Mechanical engineering. 280 p.

Boyadzhiev G. (1965) Asymptotic solutions on nonlinear systems in multifrequency mode. Proceedings of higher educational institutions. Maths. 1. pp. 35-43

Kalinin E. I. (2015) Frequency-dynamical mathematical model of a tractor unit with the transmission of torque to the ruins of the silky-diversified machine. Bulletin of Kharkiv National Technical University Petra Vasilenka. 156. pp. 327-334.

Kalinin E. I., Romanchenko V. M. (2016) Assessment of performance in case of local nesting on a forward-loaded momentless shell. Technical service of agricultural, fossil and transport complexes. 5. pp. 167-172.

Kalinin E. I., Shulyak M. L., Shevchenko I. O. (2016) Preceding transition processes in the gearbox of winter gears of a mobile power plant. Bulletin of Kharkiv National Technical University Petra Vasilenka. 168. pp. 73-79.

Kauderer G. (1961) Nonlinear mechanics. Moscow: Foreign Literature Publishing House, 778 p.

Kutkov G.M. (1980) Traction dynamics of tractors. M.: Mechanical engineering. 216 p.

Ovsyannikov S., Kalinin E., Kolesnik I. (2018) Oscillation process of multi-support machines when driving over irregularities. Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport. pp. 307-317

Salnikova N. D. (1968) On the question of frictional self-oscillations in systems with a finite number of degrees of freedom. Proceedings of higher educational institutions. Mechanical engineering. 6. pp. 15-22.

Shteinwolf L.I. (1966) Dynamics of mechanical transmissions of power plants of diesel locomotives: dis. ... doct. tech. sciences. H., 517 p.

UDC 629.1.01

ANALYTICAL STUDY OF FRICTIONAL AUTO-VIBRATIONS IN SYSTEMS WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

Kalinin E.,
D-r Tech. Scs, Prof.,
e-mail: kalinin.kpi.kharkov.ua@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6191-8446
National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,
Lebedev S., Ph. D, L.,
e-mail: hfukrndipvt@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-3067-5135
Kozlov Yu.,
e-mail: urgenurgen@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-3546-0010
Kharkov branch of L. Pogoriliy UkrNDIPVT

Summary

Purpose of the study *is to study the properties of frictional self-oscillations in systems with two degrees of freedom. As a research method, the asymptotic method of N.N. Bogolyubov and Y.A. Metropolitan.*

Research methods. *The methodological basis of the work is the generalization and analysis of the known scientific results of the dynamics of systems in resonance modes and the use of a systematic approach. The analytical method and comparative analysis were used to form a scientific problem, goal and formulation of research objectives. When developing empirical models, the main provisions of the theory of stability of systems, methodology of system analysis and research of functions were used.*

The results of the study. *A system with two degrees of freedom is considered, assuming that the friction function is approximated by a cubic polynomial in the sliding velocity, and friction is applied only to one of the masses. The exclusion of uniform rotation, corresponding to the third degree of freedom, leads to consideration not of the frictional moment, but the difference between the frictional moment and the moment of the moving forces.*

From the analysis of the results of the solutions of the equation, we can conclude that, with an accuracy up to the first approximation, inclusive, self-oscillations occur with constant frequencies equal to the natural frequencies of the system. This is consistent with the conclusions of other authors obtained using other methods.

Stationary values of the amplitudes are found. The following four cases are possible: trivial solution corresponding to uniform rotation of the system without oscillations; single frequency oscillations with the first frequency; single frequency oscillations with a second frequency; two-frequency oscillatory mode.

Conclusions. *G. Boyadzhiev's method can be applied to study multi-mass self-oscillating systems and gives their general solution in the form of asymptotic expansions to any degree of accuracy.*

The obtained conditions for the stability of stationary regimes confirm the experimental results that in multi-mass systems, self-oscillations are possible only in the falling sections of the friction characteristics.

The nature of the developing vibrations - their frequency and the ratio of the amplitudes of the constituent harmonics - is completely determined by the structure of the system, its elastic and inertial properties.

Keywords: *mechanical system, self-oscillations, degrees of freedom, resonant model.*

УДК 629.1.01

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФРИКЦИОННЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Калинин Е., д-р техн. наук, проф.,
e-mail: kalinin.kpi.kharkov.ua@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6191-8446
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»,
Лебедев С., канд. техн. наук,
e-mail: hfukrndipvt@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-3067-5135
Козлов Ю.,
e-mail: urgenurgen@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-3546-0010
Харьковский филиал УкрНИИПИТ им. Л. Погорелого

Аннотация

Цель исследования *– изучение свойств фрикционных автоколебаний в системах с двумя степенями свободы.*

Методы исследования*. В качестве метода исследования избран обобщенный Г. Бояджиевым на случай многочастотных колебаний асимптотический метод Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского. Методологической основой работы является обобщение и анализ известных научных результатов динамики систем в режимах резонансов и использования системного подхода. Для формирования научной проблемы, цели и постановки задач исследования использовался аналитический метод и сравнительный анализ. При разработке эмпирических моделей использованы главные положения теории устойчивости систем, методологии системного анализа и исследования функций.*

Результаты исследования. *Рассмотрена система с двумя степенями свободы, предполагая, что функция трения аппроксимирована кубическим полиномом от скорости скольжения, причем трение приложено только к одной из масс. Исключение равномерного вращения, соответствующего третьей степени свободы, приводит к рассмотрению не момента сил трения, а разницы между моментом сил трения и моментом движущихся сил.*

Из анализа результатов решений уравнения можно заключить, что с точностью до первого приближения включительно автоколебания происходят с постоянными частотами, равными собственным частотам системы. Это совпадает с выводами других авторов, полученными с использо-

ванием других методов.

Найдены стационарные значения амплитуд. Возможны следующие четыре случая: тривиальное решение, соответствующее равномерному вращению системы без колебаний; одночастотные колебания с первой частотой; одночастотные колебания со второй частотой; двухчастотный колебательный режим.

Вывод. *Метод Г. Бояджиева может быть применен для исследования многомассовых автоколебательных систем и дает их общее решение в виде асимптотических разложений в любой степени точности.*

Полученные условия устойчивости стационарных режимов подтверждают экспериментальные результаты, что в многомассовых системах автоколебания возможны только на ниспадающих участках характеристик трения.

Характер развивающихся колебаний – их частотность и соотношение амплитуд составляющих гармоник – полностью определяется структурой системы, ее упругими и инерционными свойствами.

Ключевые слова: *механическая система, автоколебания, степени свободы, резонансный режим.*