УДК 629.114.2 http://dx.doi.org/ 10.31473/2305-5987-2021-1-28(42)-5

ДИНАМІКА ТРАКТОРА ЯК СКЛАДНОЇ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ ТИПУ ПРОСТОРОВОЇ РАМИ

Калінін Є., д-р техн. наук, проф.,
https://orcid.org/0000-0001-6191-8446, e-mail: kalininhntusg@gmail.com,
Колєснік Ю.,
https://orcid.org/0000-0002-9915-2455, e-mail: julianakolesnik26@gmail.com,
Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка
Козлов Ю.,
https://orcid.org/0000-0002-3546-0010, e-mail: urgenurgen@gmail.com,
Харківська філія УкрНДІПВТ ім. Л Погорілого

Анотація

Мета дослідження *– розроблення матричного методу дослідження динаміки трактора як багатомасової просторової системи твердих тіл з довільним розташуванням пружної підвіски тіл на амортизаторах відносно нерухомої опорної поверхні і наявністю пружних зв'язків між тілами, типу балкових елементів.*

Методи дослідження. *Методологічною основою роботи є узагальнення та аналіз відомих наукових результатів відносно динаміки двомасових систем в режимах резонансів та використання системного підходу. Для формування наукової проблеми, визначення мети і постановки задач дослідження використовувався аналітичний метод та порівняльний аналіз. У створенні емпіричних моделей використані основні положення теорії стійкості систем, методології системного аналізу та дослідження операцій.*

Результати дослідження. *Представлено колісну машину як амортизовану континуальну конструкцію типу рами з розташованими на ній агрегатами і складальними одиницями, а також представлена методика розрахунку окремих блок-матриць коефіцієнтів жорсткості і демпфування. Водночас передбачається, що паралельно до кожного пружного елемента може бути включений в'язкий демпфер. За такої побудови матриці жорсткості і демпфування блок-матриці формуються однаково. Матриці демпфування виходять з відповідних матриць підстановкою констант демпфування замість жорстких.*

Для визначення власних частот і форм коливань недемпфованої системи через ПК найбільш ефективним є метод діагоналізації послідовними обертаннями.

Цей метод дає повний розв'язок задачі, визначаючи всі частоти і форми одночасно і хорошу збіжність.

Висновок. *Розглянутий метод аналізу і розрахунку динаміки і віброамортізації трактора, як складної механічної системи, заснований на матричному записі задачі про просторові коливання системи твердих тіл з пружними зв'язками. Матричні рівняння особливо корисні у вивченні складних сильнозв'язаних систем з обов'язковим використанням ПК.*

Представлена робота дає повну методику розрахунку трактора як складної механічної системи типу просторової рами зі встановленим на ній обладнанням.

Ключові слова: *трактор, коливальна система, сухе тертя, резонанс, нелінійність.*

Вступ. Досліджуючи динаміку складних просторових рам з установленим на них комплексом агрегатів, якими є трактори, і вирішуючи задачі віброамортізації таких систем з урахуванням можливої податливості рами, зазвичай стикаються з великими труднощами з вибору прийнятної розрахункової динамічної моделі системи і створення сучасного методу розрахунку такої системи з використанням ПК.

Один з можливих варіантів заміни реальної конструкції трактора спрощеною моделлю в ділянці спектра низьких власних частот є подання її як просторову систему твердих тіл і точкових мас, з'єднаних між собою пружними зв'язками типу балкових елементів і пов'язаних з несною поверхнею амортизаторами. Динамічний розрахунок такої системи зводиться до дослідження системи з кінцевим числом ступенів свободи і здійснюється через ПК і матричних методів розрахунку.

Послідовний розвиток матричного апарата загальної теорії власних і вимушених коливань складної пружної системи дає змогу сформулювати загальний підхід до завдань розрахунку коливань зблокованих і амортизованих механізмів і має дві суттєві переваги [Болтянский, 1969; Катковник, 1966].

По-перше, використання матриць в поєднанні з ПК систематизує і спрощує розрахунки, що є неможливим за будь-якої іншої схеми [Беляев, 1978]. Жорсткість і демпфувальні властивості повної системи можуть бути визначені з характеристик окремих амортизаторів, які швидко розраховуються, та інших балкових елементів однаковими автоматичними операціями матричної алгебри [Кац, 1998].

По-друге, застосування матриць вносить особливу математичну чіткість і ясність в загальну постановку задачі, чого не можна досягти звичайним розгорнутим позначенням [Хасьминский, 1969].

Метою роботи є розробка матричного методу дослідження динаміки трактора як багатомасової просторової системи твердих тіл з довільним розташуванням пружної підвіски тіл на амортизаторах відносно нерухомої опорної поверхні і наявністю пружних зв'язків між тілами типу балкових елементів.

Методи і матеріали. Методологічною основою роботи є узагальнення та аналіз відомих наукових результатів відносно динаміки двомасових систем в режимах резонансів та використання системного підходу. Для формування наукової проблеми, визначення мети і постановки задач дослідження використовувався аналітичний метод та порівняльний аналіз. Для створення емпіричних моделей використані основні положення теорії стійкості систем, методології системного аналізу та дослідження операцій.

Результати. Представимо колісну машину як амортизовану континуальну конструкцію типу рами з розташованими на ній агрегатами і складальними одиницями (рисунок 1). Замінимо реальну конструкцію на просторову систему тіл, які мають шість ступенів свободи і пов'язані один з одним балочними елементами 2. Припустимо, що досліджувана система може бути подана як *n* тверді тіла 1.

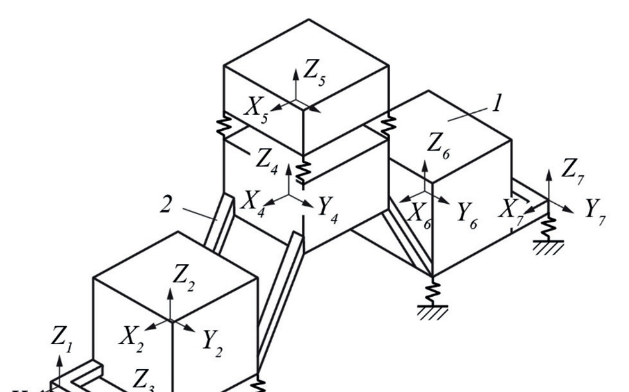

Рисунок 1 – Представлення колісної машини як амортизованої континуальної конструкції

Рівняння малих коливань в матричній формі з використанням матриць жорсткості $[K]$, демпфування $[C]$ і мас $[M]$ записується так:

$$[M]\{\ddot{X}\}+[C]\{\dot{X}-\dot{U}\}+[K]\{X-U\}=\{F\}. \qquad (1)$$

Матриця $[X]$ характеризує поступальний і обертальний рух кожного твердого тіла.

Матриця $[U]$ характеризує зсув опорної поверхні і використовується в розрахунку системи пасивної віброізоляції. Матриця $[F]$ характеризує систему сил і моментів в окремих агрегатах, встановлених на загальній рамі, і використовується в розрахунку системи активної віброізоляції. Надалі для визначеності будемо розглядати тільки систему активної віброізоляції, тобто приймемо $[U] = 0$.

Кожну матрицю $[M]$, $[K]$, $[C]$ і $[F]$ можна розбити на блоки, причому кожна блок-матриця характеризує окремо взяте тверде тіло і, отже, є матрицею розміром 6 х 6.

Рівняння малих коливань системи в блоковій формі записується так:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \cdots \\ \ddot{X}_n \end{bmatrix}+ \\ +\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \cdots \\ \dot{X}_n \end{bmatrix}+ \\ +\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdots \\ F_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Передбачається, що для кожного тіла вибирається система координат $\{X\}$, пов'язана з цим тілом.

У рівнянні (2) блок-матриці коефіцієнтів жорсткості, які розташовані на головній діагоналі, характеризуються сумарною жорсткістю всіх амортизаторів, і балкових пружних елементів, які відносяться до цього тіла. Блок-матриці, розташовані на головній діагоналі, характеризують зв'язок окремих тіл між собою.

Якщо між окремими тілами системи відсутній зв'язок, то частина коефіцієнтів матриць жорсткості і демпфування, які, як індекси, містять номери цих тіл, відразу ж слід прийняти рівними 0 [Ovsyannikov etc, 2018].

У [Кац, 1998] представлена методика розрахунку окремих блок-матриць коефіцієнтів жорсткості і демпфування. Передбачається, що паралельно до кожного пружного елемента може бути включений в'язкий демпфер. За цієї побудови матриці жорсткості і демпфування блок-матриці формуються однаково. Матриці демпфування виходять з відповідних матриць підстановкою констант демпфування замість жорстких.

Для повного розрахунку власних і вимушених коливань необхідний розв'язок спеціальної алгебраїчної задачі, відомої під назвою «матричної задачі про власні значення».

Розглянемо вільні коливання $\{F\} = 0$ недемпфованої вихідної системи $[C] = 0$; тоді рівняння (1) записується так:

$$[M]\{\ddot{X}\}+[K]\{X\}=0\,. \qquad (3)$$

Приймемо рішення для $\{X\}$ у формі

$$\{X\}=\mathrm{Re}\{ve^{i\omega t}\}, \qquad (4)$$

де $\{v\}$ − вектор-стовпець невідомих амплітуд; ω − невідома частота.

Підставляючи (4) в (3), отримуємо рівняння алгебри, яке зв'язує амплітуди коливань і частоти:

$$[K]\{v\}=\omega^2[M]\{v\}\,. \qquad (5)$$

З рівняння (5) можна визначити власні частоти і форми коливання. Повний розв'язок задачі про власні значення, визначені рівнянням (5), складається з n власних значень і n власних векторів. Кожній власній частоті ω_r^2 відповідає стовпець власних значень $\{v_r\}$. Далі n власних векторів можна записати як єдину квадратну матрицю $[V]$, кожен стовпець якої є власним вектором $\{v_r\}$:

$$[V]=[v_{jk}]=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Матриця $[V]$ називається модальною матрицею задачі про власні значення.

Також n власних частот ω_r^2 можна записати діагональними матрицями $[\Omega^2]$, як спектральну матрицю задачі про власні значення:

$$[\Omega^2]=[\omega_r^2]=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2\end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Кожен власний вектор і відповідна власна частота задовольняють співвідношенням:

$$[K]\{v_r\}=[M]\{v_r\}\omega^2. \qquad (8)$$

Використовуючи модальну і спектральну матриці, можна записати співвідношення (8) єдиним матричним рівнянням:

$$[K][V]=[M][V][\Omega^2]. \qquad (9)$$

Для визначення власних частот і форм коливань недемпфованої системи з використанням ПК найбільш ефективний метод діагоналізації послідовними обертаннями. Цей метод є одним з найстаріших, але до недавнього часу практично не використовувався, оскільки вимагає великої кількості арифметичних обчислень. Однак він дуже добре пристосований для обчислень на ПК, оскільки допомагає скласти просту стандартну програму. Цей метод дає повний розв'язок задачі, визначаючи всі частоти і форми одночасно, і хорошу збіжність.

Основною обчислювальною операцією методу є отримання симетричної матриці $[U]$ через модальну матрицю $[W]$ і спектральну матрицю $[\Omega^2]$:

$$[U]=[W]'[\Omega^2][W], \qquad (10)$$

де $[\Omega^2]$ — діагональна матриця власних значень ω_r^2; стовпці матриці $[W]$ є власними векторами ω_r у завданні власних значень: $[U][w]=[\Omega^2][w]$ або $[U][W]=[W][\Omega^2]$.

Модальна матриця $[W]$ у рівнянні (10) має додаткові властивості, які полягають в тому, що її стовпці нормалізовані, тобто $[W'_r][W_r]=1$ або $[W'][W^{-1}]=1$.

Отримання розв'язку рівняння (10) послідовними обертаннями полягає в застосуванні до матриці $[U]$ ітераційного процесу, через який вона поступово перетворюється в діагональну спектральну матрицю $[\Omega^2]$. Матриця $[U]=[U_0]$ помножується справа і зліва на пряму і транспоновану матриці трансформації, які дають поворот осей у двох вимірах

$$[U_1]=[T_1]'[U_0][T_1],\ [U_2]=[T_2]'[U_1][T_2], \text{ і далі } [U_i]=[T_i]'[U_i][T_i]. \qquad (11)$$

Кожна матриця $[T_i]$ має таку форму:

$$[T_i]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&c&0&0&\cdots&0&0&0&s&0&0\\0&0&0&0&1&0&\cdots&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&\cdots&0&0&0&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&0&0&\cdots&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\cdots&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&s&0&0&\cdots&0&0&0&c&0&0\\0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}, \qquad (12)$$

де $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$.

Матриця $[T_i]$ являє поворот на кут θ у площині p, q; вона має властивість рівності транспонованій матриці зворотної матриці. Якщо позначити елементи матриці $[U_{i-1}]$ буквами a_{jk}, а елементи матриці $[U_i]$ буквами b_{jk}, то множення матриць за формулами (11) показує, що $b_{jk}=a_{jk}$, за винятком елементів q строки і p стовпця і p строки та q стовпця, де ми маємо:

$$\begin{aligned}
&b_{pp}=a_{pp}\cos^2\theta+2a_{pq}\sin\theta\cos\theta+a_{qq}\sin^2\theta;\\
&b_{pq}=a_{pq}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-(a_{pp}-a_{qq})\sin\theta\cos\theta;\\
&b_{qq}=a_{pp}\sin^2\theta-2a_{pq}\sin\theta\cos\theta+a_{qq}\cos^2\theta;\\
&\left.\begin{aligned}b_{pj}&=a_{pj}\cos\theta+a_{qj}\sin\theta;\\ b_{qi}&=-a_{pj}\sin\theta+a_{qj}\cos\theta.\end{aligned}\right\}\quad j\neq p,q
\end{aligned} \qquad (13)$$

Якщо θ обрати так, що

$$tg2\theta=2a_{pq}/a_{pp}-a_{qq}, \qquad (14)$$

то матимемо $b_{pq}=0$. Такий результат виходить за послідовного перебору всіх елементів у двох рядках і двох стовпцях включно. Один такий крок наближає матрицю до діагональної форми, оскільки сума квадратів елементів, розташованих по обидві сторони від головної діагоналі, в $[U_i]$ менше, ніж в $[U_{i-1}]$ на величину $2a^2_{pq}$, оскільки $b_{pq}=0$, $b^2_{pj}+b^2_{qj}=a^2_{pj}+b^2_{qj}$.

Для автоматичного обчислення *c* і *s* в матриці $[T_i]$ можна скористатися прямими алгебраїчними формулами

$$t^*=\frac{2a_{pq}}{a_{pp}-a_{qq}-\sqrt{(a_{pp}-a_{qq})^2+4a^2_{pq}}};$$
$$t=\begin{cases}t^*: a_{pp}\le a_{qq}\\ -t^*: a_{qq}\le a_{pp}\end{cases}; \tag{15}$$
$$c=(1+t^2)^{-0,5};$$
$$s=t(1+t^2)^{-0,5}.$$

Матриця $[T_i]$ може бути обрана на кожному кроці так, щоб знищувалася найбільша недіагональна пара, хоча можливий і систематичний розгляд усіх елементів [Leibowitz, 1993].

У границі процес сходиться, наближаючись до спектральної матриці $[\Omega^2]$, і безперервний добуток $[T_i]$ наближається до модальної матриці $[W]$:

$$\lim_{i\to\infty}[U_i]=[\Omega^2],$$
$$\lim_{i\to\infty}([T_1],[T_2],\ldots,[T_i])=[W]. \tag{16}$$

Отже, кожний недіагональний елемент повинен розглядатися нескінченне число разів, але практично достатньо кількох обходів.

Обговорення. Розглянемо застосування методу діагоналізації до основної задачі власних значень, використовуючи рівняння (9). Цю задачу з двома симетричними матрицями $[K]$ і $[M]$ можна привести до задачі про діагоналізацію однієї симетричної матриці $[U]=[M^{-\frac{1}{2}}][K][M^{-\frac{1}{2}}]$ з модальною матрицею перетворення $[W]=[M^{-\frac{1}{2}}][V]$ так:

$$[K][V]=[M][V][\Omega^2];$$
$$[K][M^{-\frac{1}{2}}][M^{\frac{1}{2}}][V]=[M^{\frac{1}{2}}][M^{\frac{1}{2}}][V][\Omega^2];$$
$$[M^{-\frac{1}{2}}][K][M^{-\frac{1}{2}}]\cdot[M^{\frac{1}{2}}][V]=[M^{\frac{1}{2}}][V][\Omega^2]; \tag{17}$$
$$[U][W]=[W][\Omega^2].$$

Розв'язок цієї останньої задачі про власні значеннях дає спектральну матрицю $[\Omega^2]$ початкової задачі. Щоб отримати модальну матрицю $[V]$ початкової задачі, необхідно здійснити матричне множення:

$$[V]=[M^{-\frac{1}{2}}][W]. \tag{18}$$

Аналогічно можна використовувати цей метод для вирішення задачі матрицею піддатливості $[П]=[K]^{-1}$:

$$[V]=[K^{-1}][M][V][\Omega^2];$$
$$[V][\Omega^2]=[П][M][V]; \tag{19}$$

$$[M^{\frac{1}{2}}][V][\Omega^2]=[M^{\frac{1}{2}}][П][M^{\frac{1}{2}}][M^{\frac{1}{2}}][V];$$
$$[W][\Omega^2]=[U][W], \tag{20}$$

тобто в цьому випадку

$$[U]=[M^{\frac{1}{2}}][П][M^{\frac{1}{2}}], \tag{21}$$

а значення модальної матриці $[V]$ виходить як

$$[V]=[M^{-\frac{1}{2}}][W]. \tag{22}$$

Як показано вище, для вирішення завдання власних значень буде необхідно обчислювати $[M^{-\frac{1}{2}}]$ і $[M^{\frac{1}{2}}]$. Матриця $[M]$ – симетрична, але може бути як діагональною, так і недіагональною залежно від вибору систем координат у твердому тілі. У разі представлення інерційних властивостей системою точкових мас матриця $[M]$ завжди діагональна [Caughey etc, 1992].

Представимо матрицю $[M]$ через її спектральну матрицю $[D(\mu)]$ і модальні матриці перетворення $[N]$ і $[N]'$:

$$[M]=[N]'[D(\mu)][N]. \tag{23}$$

Якщо ми отримаємо таке представлення, то з діагональною матрицею $[D(\mu)]$

можна отримати матриці, які є функціями матриці [*M*]:

$$[M^{-\frac{1}{2}}]=[N]'[D(\mu^{-\frac{1}{2}})][N],$$
$$[M^{\frac{1}{2}}]=[N]'[D(\mu^{\frac{1}{2}})][N], \qquad (24)$$

де $[D(\mu^{-\frac{1}{2}})]$ і $[D(\mu^{\frac{1}{2}})]$ – діагональні матриці, елементи яких – негативні і позитивні половинні ступені відповідних елементів матриці $[D(\mu)]$. Розрахунок матриць $[D(\mu)]$, $[N]$, $[N]'$ може бути проведений також методом діагоналізації послідовними обертаннями.

Визначивши власні частоти і форми недемпфованої системи, визначимо зміну власних значень системи завдяки демпфуванню. До матриць $[K]$ і $[M]$ додається матриця демпфування $[C]$. Завдання полягає у визначенні комплексних власних значень $p_r - \alpha_r + j\omega_r$, які задовольняють рівняння

$$(p^2[M]+p[C]+[K])\{v\}=0. \qquad (25)$$

Будемо допускати, що власні вектори системи з демпфуванням не відрізняються від власних векторів недемпфованої системи, і визначимо демпфування розкладанням за власними формами.

Розкладання на власні вектори довільного вектора $\{y\}$ має форму:

$$\{y\}=\sum_{r=1}^{n} a_r\{v_r\}, \qquad (26)$$

де a_r – скалярні множники форми. Коли $\{y\}$ і $\{v_r\}$ відомі, можна, перемножуючи обидві частини рівняння на $\{v_s\}[M]$, визначити a_r.

Внаслідок ортогональності власних форм

$$\{v_s\}[M]\{v_r\}=0, \qquad (27)$$

і члени в правій частині рівняння (26) обертаються в нуль за винятком членів, для яких $r = s$. Підставляючи отримані таким способом значення множників форми, розкладання можна переписати так:

$$\{y\}=\sum_{r=1}^{n}\{v_r\}\frac{\{v_r\}'[M]\{y\}}{\{v_r\}'[M]\{v_r\}}, \qquad (28)$$

або так

$$\{y\}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\{v_r\}\{v_r\}'[M]}{\{v_r\}'[M]\{v_r\}}\{y\}. \qquad (29)$$

Форма рівняння (28) підкреслює розкладання на власні вектори, оскільки відношення в правій частині є скаляром. Рівняння у формі (29) зручно використовувати, коли розкладається велике число векторів $\{y\}$, оскільки відношення в правій частині представляють квадратні матриці і розраховуються тільки один раз [Калінін та інш., 2016].

Форма рівнянь (28) стає ще більш економною, з точки зору часу обчислень, коли необхідно розкласти більше ніж n векторів $\{y\}$. Перевірка правильності обчислення матриць забезпечується тотожністю:

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\{v_r\}\{v_r\}'[M]}{\{v_r\}'[M]\{v_r\}}=[E]. \qquad (30)$$

Іншим варіантом розкладання, корисним для розкладання вектора збудження $\{F\}$, є

$$\{F\}=\sum_{r=1}^{n}\omega_r^2[M]\{v_r\}[a_r]=\sum_{r=1}^{n}[M]\{v_r\}\frac{\{v_r\}'\{F\}}{\{v_r\}'[M]\{v_r\}}. \qquad (31)$$

Ця форма може розглядатися як розкладання збудження в частках амплітуд інерційних сил за власними формами коливань. Остання форма запису аналогічна рівнянню (29).

Розкладаючи демпфування за власними формами коливань, отримаємо ступінь загасання, що відповідає вільному руху окремо для кожної форми

$$2\alpha_r=2\zeta_r\omega_r=\frac{\{v_r\}'[C]\{v_r\}}{\{v_r\}'[M]\{v_r\}}, \qquad (32)$$

де ζ_r – ступінь демпфування в частках критичного.

Розглянемо розв’язок задачі вимушених коливань для рівняння (2), якщо відомий розв’язок задачі власних значень без демпфування, отримані розкладання коефіцієнтів демпфування за власними формами і проведено розкладання за власними формами примусових сил [Манита, 2006].

Коли збудження має усталений синусоїдальний характер

$$\{F\} = \mathrm{Re}\{fe^{j\omega t}\}, \quad (33)$$

то для розв'язку можна прийняти форму

$$\{X\} = \mathrm{Re}\{xe^{j\omega t}\}. \quad (34)$$

Підставляючи (33) і (34) в рівняння (2), отримаємо:

$$(-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K])\{x\} = \{f\}. \quad (35)$$

Розглянемо розкладання сил і переміщень за власними формами. Знову покладемо, що власні форми системи з демпфуванням збігаються з власними формами системи без демпфування:

$$\{f\} = \sum_{r=1}^{n} \frac{[M]\{v_r\}\{v_r\}'}{\{v_r\}'[M]\{v_r\}}\{f\}; \quad (36)$$

$$\{x\} = \sum_{r=1}^{n} a_r\{v_r\}, \quad (37)$$

де a_r – невідомі коефіцієнти. Підставляючи вирази (36) і (37) в рівняння (35), а також використовуючи співвідношення (8) і (32) як

$$[K]\{v_r\} = \omega_r^2[M]\{v_r\}; \\ [C]\{v_r\} = 2\zeta_r\omega_r[M]\{v_r\}, \quad (38)$$

отримаємо

$$a_r = \frac{1}{-\omega^2 + 2j\zeta_r\omega_r\omega + \omega_r^2} \cdot \frac{\{v_r\}'\{f\}}{\{v_r\}'[M]\{v_r\}}. \quad (39)$$

Підставляючи отримані результати послідовно в (37) і (34), отримаємо остаточно

$$\{X_{(t)}\} = \mathrm{Re}\left\{\sum_{r=1}^{n} \frac{e^{j\omega t}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\zeta_r\omega_r\omega} \frac{\{v_r\}\{v_r\}'}{\{v_r\}'[M]\{v_r\}}\{f\}\right\}, \quad (40)$$

$$\{\dot{X}_{(t)}\} = \mathrm{Re}\left\{\sum_{r=1}^{n} \frac{j\omega e^{j\omega t}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\zeta_r\omega_r\omega} \frac{\{v_r\}\{v_r\}'}{\{v_r\}'[M]\{v_r\}}\{f\}\right\}. \quad (41)$$

Отриманий результат є наближеним, оскільки форми коливань системи з демпфуванням не збігаються з формами коливань системи без демпфування. У ділянці частот помилка невелика, хоча на високих частотах можливі значно більші помилки [Калінін та ін., 2016].

Закінчимо вивчення динаміки складних механічних систем визначенням коефіцієнтів передачі віброізоляції.

Розглянемо віброізоляцію від активних сил для *n* масової просторової системи. Система пов'язана з нерухомою жорсткою опорною поверхнею рядом амортизаторів. Припустимо, що кожен амортизатор характеризується тільки узагальненою поступальною жорсткістю $[K_p]$.

Система активних сил, яка діє на досліджувану просторову систему, визначається матрицею-стовпцем $\{F\}$. Тоді блок-матриця, яка характеризує узагальнене збудження, прикладене до *j*-го тіла, буде $\{F_j\}$. Знайдемо матрицю коефіцієнтів передачі сили від одного з тіл, а саме від тіла *j* до одного з амортизаторів, розташованого між *i*-м тілом і жорсткою несною поверхнею.

З розв'язку матричного рівняння вимушених коливань (2) можна визначити блок-матриці узагальнених переміщень з використанням оберненої матриці динамічної жорсткості:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} - M_1\omega^2 & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} - M_2\omega^2 & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} - M_n\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdots \\ F_n \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Вираз (42) можна записати через розчленовану на блоки матрицю динамічної піддатливості $[\Pi_д]=[K_{дин}]^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \cdots & \Pi_{1n} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \cdots & \Pi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Pi_{n1} & \Pi_{n2} & \cdots & \Pi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdots \\ F_n \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Далі будемо розглядати випадок, коли задане узагальнене силове збудження тільки на одному з тіл, наприклад *j*-му тілі, і тільки одна складова узагальненого силового збудження, а моментна складова $\{Q_{xj}\}=0$.

Тоді з (43) отримуємо:

$$\{X_i\} = [\Pi_{ij}]\{F_j\}. \qquad (44)$$

Надалі індекси *i*, *j* опускаємо, а вираз (44) представимо, використовуючи підматриці поступального і обертального переміщень так:

$$\begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{xx} & \Pi_{x\theta} \\ \Pi_{\theta x} & \Pi_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (45)$$

або

$$\{X\} = [\Pi_{xx}]\{F_x\};$$
$$\{\theta\} = [\Pi_{\theta x}]\{F_x\}. \qquad (46)$$

Далі розглядаємо одну з груп амортизаторів, пов'язаних з тілом.

Поступальне зміщення $\{P\}$ і обертання $\{\Lambda\}$ точки кріплення n до тіла цього амортизатора в напрямку пружних осей виразимо через поступальний зсув $\{X\}$ і обертання $\{\theta\}$ центру маси i-го тіла:

$$\{P\} = [A]'\{X\} + [A]'[R_n]'\{\theta\},$$
$$\{\Lambda\} = [A]'\{\theta\}. \qquad (47)$$

Відомо, що для амортизатора, який характеризується тільки узагальненою поступальною жорсткістю $[K_p]$, можна записати співвідношення:

$$\{F_p\} = [K_p]\{P\}. \qquad (48)$$

Підставляючи (46) і (47) у вираз (47), отримуємо:

$$\{F_p\} = [K_p][A]'[[\Pi_{xx}] + [R_n]'[\Pi_{\theta x}]]\{F_x\}. \qquad (49)$$

Тоді з (49) для матриці коефіцієнтів передачі сили отримуємо вираз

$$[T_F] = [K_p][A]'([\Pi_{xx}] + [R_n]'[\Pi_{\theta x}]). \qquad (50)$$

Аналогічно можна вивести співвідношення для матриці коефіцієнтів передачі $\{T_\theta\}$ за збудження одного з тіл узагальненим моментом $\{Q_{xj}\}$.

Висновки. Розглянутий метод аналізу і розрахунку динаміки і віброамортізації трактора, як складної механічної системи, заснований на матричному записі задачі про просторові коливання системи твердих тіл з пружними зв'язками. Матричні рівняння є особливо корисними для вивчення складних сильнозв'язаних систем з обов'язковим використанням ПК.

Представлена робота дає повну методику розрахунку трактора як складної механічної системи типу просторової рами з встановленим на ній обладнанням.

Перелік літератури

Беляев Л. С. (1978). Решение сложных оптимизационных задач в условиях неопределенности. Новосибирск : Наука. Сиб. отделение, 126.

Болтянский В. Г. (1969). Математические методы оптимального управления. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 408.

Калінін Є. І., Романченко В. М., & Юр'єва Г. П. (2016). Моделювання коливань кузову транспортного засобу на гусеничному ході з врахуванням гнучкості кузову. Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів. 6. 232-238.

Катковник В. Я. (1966). Многомерные дискретные системы управления. М. : Наука, 416.

Кац И. Я. (1998). Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. Екатеринбург : УрГАПС, 221.

Манита А. Д. (2006). Марковские процессы в непрерывной модели стохастической синхронизации. Успехи математических наук. 61, 5, 187 – 188.

Хасьминский Р. З. (1969). Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметром: научное издание. М. : Наука, 366.

Caughey T. K., & Dienes J. K. (1992). The behavior of linear systems with random parametric excitation. Journal of Mathematics and Physics. 41. 4. 301 – 311.

Leibowitz M. A. (1993). Statistical behavior of linear systems with randomly varying parameters. Journal of Mathematical Physics. 4. 6. 128 – 132

Ovsyannikov S., Kalinin E., & Kolesnik I. (2018). Oscillation process of multi-support machines when driving over irregularities. Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport. 307-317. doi: 10.1007/978-3-030-19756-8_28.

References

Belyaev L. S. (1978).Solution of complex optimization problems in conditions of uncertainty. – Novosibirsk: Science. Sib. department, 126.

Boltyansky V. G. (1969). Mathematical methods of optimal control. M.: Science, Ch. ed. phys.-mat. lit., 408.

Caughey T. K., Dienes J.K. (1992). The behavior of linear systems with random parametric excitation. Journal of Mathematics and Physics. Vol. 41. №4, 301 – 311.

Kalinin E. I., Romanchenko V. M., Yurieva G. P. (2016) Simulation of vehicle body vibrations on a caterpillar course taking into account body flexibility. Technical service of agro-industrial, forest and transport complexes. № 6, 232–238.

Katkovnik V. Y. (1966). Multidimensional discrete control systems. M.: Nauka, 416.

Kats I. Y. (1998). Method of Lyapunov functions in problems of stability and stabilization of systems of random structure. Yekaterinburg: UrGAPS, 221.

Khasminsky R. Z. (1969). Stability of systems of differential equations under random perturbations by their parameter: scientific publication. Moscow: Nauka, 366.

Leibowitz M. A. (1993). Statistical behavior of linear systems with randomly varying parameters. Journal of Mathematical Physics, Vol. 4, №6, 128 – 132.

Manita A. D. (2006). Markov processes in a continuous model of stochastic synchronization. Advances in Mathematical Sciences. T. 61, No. 5, 187 – 188.

Ovsyannikov S., Kalinin E., Kolesnik I. (2006). Oscillation process of multi-support machines when driving over irregularities. Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport, 307-317. doi: 10.1007/978-3-030-19756-8_28.

UDC 629.114.2

TRACTOR DYNAMICS AS A COMPLEX MECHANICAL SYSTEM SPATIAL FRAME TYPE

Kalinin E., D-r.Tech. Scs., Prof.,
https://orcid.org/0000-0001-6191-8446, e-mail: kalininhntusg@gmail.com,
Kolesnik Y.,
https://orcid.org/0000-0002-9915-2455, e-mail: julianakolesnik26@gmail.com,
P. Vasilenko Kharkov National Technical University of Agriculture,
Kozlov Yu.,
https://orcid.org/0000-0002-3546-0010, e-mail: urgenurgen@gmail.com,
Kharkiv branch of L. Pogorilyy UkrNDIPVT

Summary

Purpose of the study *is to develop a matrix method for studying the dynamics of a tractor as a multi-mass spatial system of rigid bodies with an arbitrary arrangement of elastic suspension of bodies on shock absorbers relative to a fixed support surface and the presence of elastic connections between the bodies, made in the form of beam elements.*

Research methods. *The methodological basis of the work is the generalization and analysis of well-known scientific results regarding the dynamics of two-mass systems in resonance modes and the use of a systematic approach. The analytical method and comparative analysis were used to form a scientific problem, determine the goal and formulate the research objectives. When creating empirical models, the main provisions of the theory of stability of systems, methodology of systems analysis and research of operations were used.*

The results of the study. *A wheeled vehicle is presented as an amortized continuous frame type structure with assemblies and assembly units located on it, as well as a methodology for calculating individual block matrices of stiffness and damping coefficients. In this case, it is assumed that a viscous damper can be connected in parallel to each elastic element. In this construction of the stiffness and damping matrix of the block matrix are formed in the same way. Damping matrices are derived from the corresponding matrices by substituting damping constants instead of stiffness constants.*

To determine the natural frequencies and vibration modes of an undamped system using a PC, the most effective method of diagonalization by successive rotations.

This method provides a complete solution to the problem, allowing all frequencies and shapes to be determined simultaneously, and good convergence.

Conclusions. *The considered method for analyzing and calculating the dynamics and vibration damping of a tractor as a complex mechanical system is based on a matrix record of the problem of spatial vibrations of a system of rigid bodies with elastic bonds. Matrix equations seem to be especially useful in the study of complex tightly coupled systems with the obligatory use of a PC.*

The presented work provides a complete methodology for calculating a tractor as a complex mechanical system such as a spatial frame with equipment installed on it.

Keywords: *tractor, oscillatory system, dry friction, resonance, nonlinearity*

УДК 629.114.2

ДИНАМИКА ТРАКТОРА КАК СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РАМЫ

Калинин Е., д-р техн. наук., проф.,
https://orcid.org/0000-0001-6191-8446, e-mail: kalininhntusg@gmail.com,
Колесник Ю.,
https://orcid.org/0000-0002-9915-2455, e-mail: julianakolesnik26@gmail.com,
Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенка,
Козлов Ю.,
https://orcid.org/0000-0002-3546-0010, e-mail: urgenurgen@gmail.com,
Харьковский филиал УкрНИИПИТ им. Л. Погорелого

Аннотация

Цель исследования *– разработка матричного метода исследования динамики трактора как многомассовой пространственной системы твердых тел с произвольным расположением упругой подвески тел на амортизаторах относительно неподвижной опорной поверхности и наличием упругих связей между телами, выполненных в виде балочных элементов.*

Методы исследования. *Методологической основой работы является обобщение и анализ известных научных результатов относительно динамики двухмассовых систем в режимах резонансов и использования системного подхода. Для формирования научной проблемы, определение цели и постановки задач исследования использовался аналитический метод и сравнительный анализ. При создании эмпирических моделей использованы основные положения теории устойчивости систем, методологии системного анализа и исследования операций.*

Результаты исследования. *Представлена колесная машина в качестве амортизированной континуальной конструкции типа рамы с расположенными на ней агрегатами и сборочными единицами, а также представлена методика расчета отдельных блок-матриц коэффициентов жесткости и демпфирования. При этом предполагается, что параллельно каждому упругому элементу может быть включен вязкий демпфер. При этом построении матрицы жесткости и демпфирования блок-матрицы формируются одинаковым образом. Матрицы демпфирования выходят из соответствующих матриц путем подстановки констант демпфирования вместо жестких.*

Для определения собственных частот и форм колебаний недемпфированой системы с помощью ПК наиболее эффективный метод диагонализации последовательными вращениями.

Этот метод дает полное решение задачи, позволяя определить все частоты и формы одновременно, и хорошую сходимость.

Выводы. *Рассмотренный метод анализа и расчета динамики и виброамортизации трактора как сложной механической системы основан на матричной записи задачи о пространственных колебаниях системы твердых тел с упругими связями. Матричные уравнения представляются особенно полезными при изучении сложных сильносвязанных систем при обязательном использовании ПК.*

Представленная работа дает полную методику расчета трактора как сложной механической системы типа пространственной рамы с установленным на ней оборудованием.

Ключевые слова: *трактор, колебательная система, сухое трение, резонанс, нелинейность*