

## ЗАСТОСУВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАННЯ ДЛЯ ОЦІНКИ АДЕКВАТНОСТІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

**А. Коробко**, канд. техн. наук, доц.,

ak82andrey@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6618-7790>

**Ю. Козлов**, hfukrndipvt@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-3546-0010>

Харківська філія УкрНДІПВТ ім. Л. Погорілого

**Анотація.** Метою роботи є дослідження можливості застосування невизначеності для оцінювання адекватності математичної моделі. Для досягнення поставленої мети виконано такі завдання: розроблено показник і критерій оцінювання впливу методичної похибки на результат вимірювання із застосуванням невизначеності вимірювання; розроблено показник і критерій оцінювання впливу випадкової похибки на результат вимірювання із застосуванням невизначеності вимірювання. Запропоновано новий спосіб оцінювання впливу випадкової і методичної похибок на результат вимірювання за показниками невизначеності вимірювання. Випробування продукції на усіх етапах її життєвого циклу є важливим елементом забезпечення її якості. Особливо актуальними випробування є на етапі проведення науково-дослідних і дослідно-конструкторських робіт та на етапі виробництва продукції. Саме на цих етапах життєвого циклу у продукції формуються ті властивості, які будуть направлені на задоволення потреб споживачів на наступних етапах життєвого циклу. На цьому етапі постає завдання оцінювання точності та адекватності вимірювання показників і визначення

міри впливу випадкової і методичної похибок на результат вимірювання. Ці завдання є досить складними. Кількісним показником впливу методичної похибки запропоновано відношення різниці між теоретичними та експериментальними даними до середньої похибки їх визначення. Кількісним показником впливу випадкової похибки запропоновано відношення невизначеності вимірювання експериментальних даних до невизначеності вимірювання теоретичних даних. Указані показники засновано на припущенні того, що теоретичні і експериментальні дані розподілені нормально. Теоретичний розподіл змінюється в межах сумарної невизначеності вимірювання типу В, досліджуваного параметра. Фізична суть показника впливу методичної похибки – ймовірність з якою результати вимірювання середнього значення показника (визначене експериментально) перебувають у межах можливого відхилення теоретичного значення цього показника.

**Ключові слова:** невизначеність вимірювання, збіг результатів, ймовірність, випадкова похибка, методична похибка, теоретичне дослідження.

**Постановка проблеми.** Випробування продукції на усіх етапах її життєвого циклу є важливим елементом забезпечення її якості. Особливо актуальними випробування є на етапі проведення науково-дослідних і дослідно-конструкторських робіт та на етапі виробництва продукції. Саме на цих етапах життєвого циклу у продукції формуються ті властивості, які будуть направлені на задоволення потреб споживачів на наступних етапах життєвого циклу. На цьому етапі постає завдання оцінювання точності та адекватності вимірювання показників і визначення міри впливу випадкової і методичної похибок на результат вимірювання. Ці за-

вдання є досить складними.

У статті запропоновано використовувати показник невизначеності вимірювання для оцінювання адекватності математичної моделі.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Під час проведення наукових досліджень важливим є питання визначення наскільки розроблена математична модель вимірювання значень показника (випробувань) збігається з реальною моделлю вимірювання (випробувань). Питанню дослідження збігу теоретичних та експериментальних розподілів присвячено значна кількість робіт, як фундаментальних посібників з теорії ймовірності та теорії експерименту [1, 2], так і

публікації з вирішення окремих приватних задач [3, 4]. Проте, слід відмітити, що до сьогоднішнього дня у відомій літературі немає єдиного підходу до термінів і визначень з цього питання [5]. З огляду на це виникають розбіжності у трактуванні окремих понять.

Детальний аналіз показників і критеріїв для встановлення відповідності теоретичного розподілу експериментальному здійснено у роботі [4].

**Мета роботи і постановка завдань дослідження.** Метою роботи є дослідження можливості застосування невизначеності для оцінювання адекватності математичної моделі. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

– розробити показник і критерій оцінювання впливу методичної похибки на результат вимірювання із застосуванням невизначеності вимірювання;

– розробити показник і критерій оцінювання впливу випадкової похибки на результат вимірювання із застосуванням невизначеності вимірювання.

**Виклад основного матеріалу.** Методика і засоби вимірювальної техніки мають похибки. Через це результати експериментальних досліджень будуть відрізнятися від результатів розрахунків за розробленою математичною моделлю. На результат вимірювання будуть впливати випадкова, систематична і методична похибки. Це призведе до розкиду отриманих експериментальних даних, а їх математичне очікування буде відрізнятися від теоретичного (розрахованого за математичною моделлю).

Досліджувана теоретична модель (модельне рівняння) вимірювання показника має вигляд:

$$y_T = f(X \pm U_X), \quad (1)$$

де  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  – множина значень величин, які входять у модельне рівняння вимірювання теоретичного значення досліджуваного показника  $y$ ;

$U_X = \{U_{X1}, U_{X2}, \dots, U_{Xn}\}$  – множина значень розширених невизначеностей, з якими вимірюються показники  $X$ , які входять у модельне рівняння вимірювання досліджуваного показника  $y$ ;

$n$  – кількість величин, які входять у модельне рівняння вимірювання досліджуваного показ-

ника  $y$ .

Результат теоретичного вимірювання можна представити у вигляді розподілу з числом вимірювань, яке наближається до безкінечності. Такі результати розподіляються за нормальним законом, а математичне очікування  $\bar{y}_T$  (середнє значення) буде рівнятись результату розрахунку за (1) без врахування невизначеності вимірювання  $U_X$ :

$$\bar{y}_T = y_T, \quad (2)$$

У теоретичного дослідження невизначеність  $U_X$  буде визначатись невизначеністю типу В [6].

Невизначеність вимірювання  $U_X$  розраховується з довірчою ймовірністю  $P=0,95$ , тому межі зміни показника  $y$  будуть охоплювати майже всю площу під кривою розподілу (рис. 1). Умовні межі зміни теоретичного значення показника  $y$  будуть визначатись величиною його невизначеності вимірювання

$$y_{Tmax}(y_{Tmin}) = \bar{y}_T \pm U_{yT}, \quad (3)$$

де  $y_{Tmax}, y_{Tmin}$  – максимальне і мінімальне теоретичне значення показника;

$U_{yT}$  – невизначеність вимірювання показника  $y$ .

Похибка визначення середнього теоретичного значення

$$m_{yT} = \frac{U_{yT}}{3}, \quad (4)$$

Під час вимірювань в реальних умовах на їхній результат будуть впливати випадкова і систематична похибки. Через дію випадкової похибки розширюється інтервал, в якому може знаходитись дійсне значення вимірюваної величини

$$U_{ye} \geq U_{yT}, \quad (5)$$

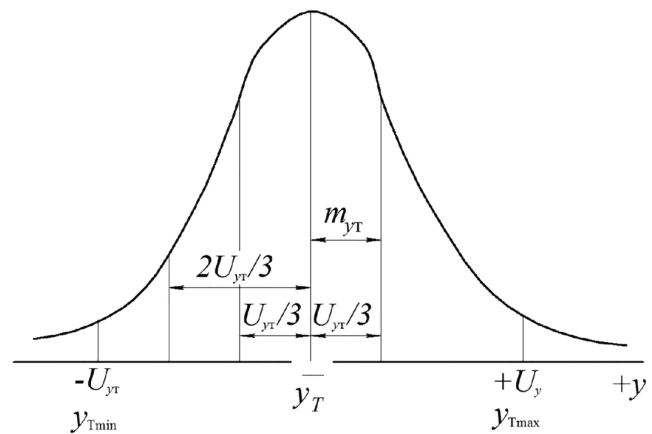


Рисунок 1 – Розподіл теоретичних значень показника  $y$

Через недосконалість математичної моделі (модельного рівняння) вимірювання показника (методична похибка), математичне очікування експериментальних даних може відрізнятись від теоретичного

$$\bar{y}_T \neq \bar{y}_e, \quad (6)$$

Математичне очікування, середнє квадратичне відхилення і похибка визначення середнього значення експериментальних даних визначаються за класичними формулами теорії ймовірності [2] (рис. 2).

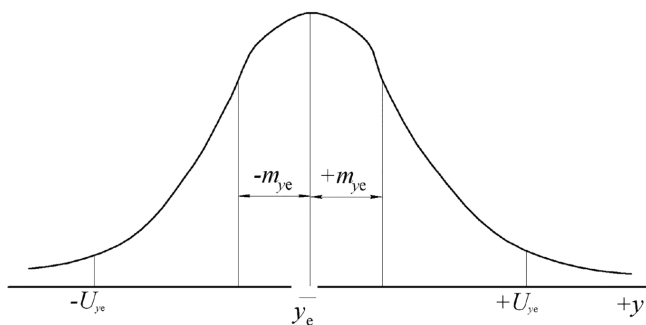


Рисунок 2 – Розподіл експериментальних даних вимірювання показника  $y$

Для оцінювання впливу методичної похибки на результат вимірювання визначимо межі можливих відхилень теоретичних даних  $\bar{y}_e$  від експериментальних  $\bar{y}_T$  ( $\Delta y$ ) в частках від похибки визначення різниці між цими величинами  $m_y$  (рис. 3)

$$k_1 = \frac{|\bar{y}_e - \bar{y}_T|}{\sqrt{m_{y_0}^2 + m_{y_e}^2}}, \quad (7)$$

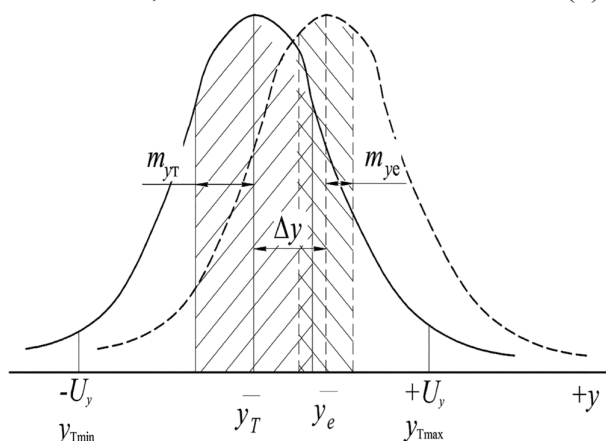


Рисунок 3 – Графічна інтерпретація збігу результатів теоретичних та експериментальних досліджень

За спеціальними таблицями, наведеними в літературі з математичної статистики, залежно від величини  $k_m$ , визначається ймовірність, з якою середнє значення теоретичного розподілу

виходить за довірчі межі визначення середнього значення досліджуваної величини визначеної експериментальним шляхом.

Показник  $k_m$  є кількісним показником вираження методичної похибки і характеризує ймовірність з якою теоретична модель не відповідає експериментальній.

Значення показника  $k_m$  змінюється в межах  $k_m = [0; \infty)$ .

Для оцінювання впливу випадкової похибки порівнюються між собою значення невизначеності теоретичного розподілу та експериментального

$$k_b = \frac{U_{ye}}{U_{yT}} \quad (8)$$

За значень  $k_b \geq 2$  значення випадкової похибки буде перевищувати значення систематичної похибки. У цьому випадку можна зробити висновок про те, що випадкова похибка суттєво впливає на результат вимірювання. Зменшити її можна, виконавши ще одну серію вимірювань. Якщо після додаткових вимірювань значення  $k_b$  не зменшилось, необхідно вжити заходів з усунення зовнішніх факторів, які впливають на точність вимірювання.

**Висновки.** У результаті проведеного дослідження розроблено новий спосіб оцінювання впливу випадкової і методичної похибок на результат вимірювання за показниками невизначеності вимірювання. Кількісним показником впливу методичної похибки запропоновано відношення різниці між теоретичними і експериментальними даними до середньої похибки їх визначення. Кількісним показником впливу випадкової похибки запропоновано відношення невизначеності вимірювання експериментальних даних до невизначеності вимірювання теоретичних даних. Указані показники засновано на припущенні того, що теоретичні та експериментальні дані розподілені нормально. Теоретичний розподіл змінюється в межах сумарної невизначеності вимірювання типу В досліджуваного параметра. Фізична суть показника впливу методичної похибки – ймовірність, з якою результати вимірювання середнього значення показника (визначене експериментально) перебувають у межах можливого відхилення теоретичного значення цього показника.

## Література

1. Р 50.1.033-2001 Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа хи-квадрат. [Дата введения 2002-07-01]. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 87 с. (Рекомендации).

2. Налимов В. В. Теория эксперимента. – М. : Наука, 1971. – 208 с.

3. Greenwood, P. E., Nikulin, M. S. (1996). A guide to chi-squared testing. New York : John Wiley & Sons, 280 p.

4. Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Постовалов С. Н. Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. Проверка простых гипотез. Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11. № 2 (34). С. 96-111.

5. Фундаментальные проблемы теории точности / Под ред. В. П. Булатова, И. Г. Фридлиндера. СПб. : Наука, 2001. 504 с.

6. Захаров И. П. Неопределенность измерений. Для чайников и... начальников. Учебное пособие. Издание 3-е переработанное и дополненное. Харьков : ФЛП Андреев К. В., 2015. 51 с.

## Literature

1. Р 50.1.033-2001. (2002). Recommendations on standardization. Applied statistics. Rules for verifying the agreement between the experimental distribution and the theoretical distribution. Part I. Criteria for the chi-square type. 2002. 87.

2. Nalimov V. V. (1971). The theory of experiment. M. Science, 208 p.

3. Greenwood, P. E., Nikulin, M. S. (1996). A guide to chi-squared testing. New York : John

Wiley & Sons, 280 p.

4. Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B., & Postovalov S. N. (2008). Comparative analysis of the power of the consent criteria for close competing hypotheses. I. Check simple hypotheses. Siberian Journal of Industrial Mathematics. 11. 2 (34). 96-111.

5. Bulatov V. P., & Fridlender I. G. (2001). Fundamental problems in the theory of accuracy. 504.

6. Zakharov I. P. (2015). Uncertainty of Measurements. For dummies and ... bosses. Tutorial. Edition 3-rd revised and supplemented. 51.

## Literatura

1. R 50.1.033-2001 Rekomendacii po standartizacii. Prikladnaja statistika. Pravila proverki soglasija opytnogo raspredelenija s teoreticheskim. Chast' I. Kriterii tipa hi-kvadrat. [Data vvedenija 2002-07-01]. – М. : Izd-vo standartov, 2002. – 87 s. (Rekomendacii).

2. Nalimov V. V. Teorija jeksperimenta. – М. : Nauka, 1971. – 208 s.

3. Greenwood, P. E., Nikulin, M. S. (1996). A guide to chi-squared testing. New York : John Wiley & Sons, 280 p.

4. Lemeshko B. Ju., Lemeshko S. B., Postovalov S. N. Sravnitel'nyj analiz moshhnosti kriteriev soglasija pri blizkih konkurirujushhih gipotezah. Proverka prostyh gipotez. Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki. 2008. T. 11. № 2 (34). S. 96-111.

5. Fundamental'nye problemy teorii tochnosti / Pod red. V. P. Bulatova, I. G. Fridlendera. SPb. : Nauka, 2001. 504 s.

6. Zaharov I. P. Neopredelennost' izmerenij. Dlja chajnikov i... nachal'nikov. Uchebnoe posobie. Izdanie 3-e pererabotannoe i dopolnennoe. Har'kov : FLP Andreev K. V., 2015. 51 s.

UDC 519.87:001.8

## INFLUENCE OF METHODOLOGICAL AND RANDOM ERRORS TO THE RESULT OF MEASUREMENT (IN THE ORDER OF DISCUSSION)

**A. Korobko**, Ph. D., Associate Professor, "Leonid Pogorilyy Ukrainian Scientific Research Institute of Forecasting and Testing of Machinery and Technologies for Agricultural Production" Kharkiv branch, ak82andrey@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6618-7790>

**Yu. Kozlov**, "Leonid Pogorilyy Ukrainian Scientific Research Institute of Forecasting and Testing of Machinery and Technologies for Agricultural Production" Kharkiv branch  
<https://orcid.org/0000-0002-3546-0010>

**Summary.** *The purpose of the study is to investigate the possibility of applying uncertainty to assess the adequacy of a mathematical model. To achieve the set goal, the following tasks were solved: the indicator and the criterion for assessing the influence of the methodological error on the measurement result using the measurement uncertainty were developed; the indicator and the criterion for estimating the influence of the random error on the measurement result using the measurement uncertainty are developed. A new method of estimating the influence of random and methodological errors on the measurement result on the indices of uncertainty of measurement is proposed. Product tests at all stages of its life cycle are an important element in ensuring its quality. Particularly relevant tests are at the stage of research and development, and in the production phase. It is precisely at these stages of the life cycle that the products are formed that will be aimed at meeting the needs of consumers at the next stages of the life*

*cycle. At this stage, the task is to assess the accuracy and adequacy of measuring the indicators and determine the degree of influence of random and methodological errors on the measurement result. The ratio of the uncertainty in the measurement of experimental data to the uncertainty in measuring theoretical data for a quantitative measure of the effect of a random error is proposed. These indicators are based on the assumption that the theoretical and experimental data are normally distributed. The theoretical distribution varies within the total uncertainty of measurement of type B of the parameter under study. The physical essence of the indicator of the influence of the methodical error is the probability with which the results of measuring the average value of the indicator (determined experimentally) are within the limits of a possible deviation of the theoretical value of this indicator.*

**Keywords:** *uncertainty of measurement, coincidence of results, probability, random error, methodological error, theoretical investigation.*

УДК 519.87:001.8

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

**А. Коробко**, канд. тех. наук, доц.,  
ak82andrey@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6618-7790>

**Ю. Козлов**, <https://orcid.org/0000-0002-3546-0010>  
Харьковский филиал УкрНИИПИТ им. Л. Погорелого

**Аннотация.** *Целью работы является исследование возможности применения неопределенности для оценки адекватности математической модели. Для достижения поставленной цели решены следующие задачи: разработан показатель и критерий оценки влияния методической погрешности на результат измерения с применением неопределенности измерения; разработан показатель и критерий оценки влияния случайной погрешности на результат измерения с применением неопределенности измерения. Предложен новый способ оценки влияния случайной и методической погрешностей на результат измерения по показателям неопределенности измерения. Испытания продукции на всех этапах ее жизненного цикла являются важным элементом обеспечения ее качества. Особенно актуаль-*

*ными испытания являются на этапе научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ и на этапе производства продукции. Именно на этих этапах жизненного цикла в продукции формируются те свойства, которые будут направлены на удовлетворение потребностей потребителей на следующих этапах жизненного цикла. На этом этапе стоит задача оценки точности и адекватности измерения показателей и определения степени влияния случайной и методической погрешностей на результат измерения. В качестве количественного показателя влияния методической погрешности предложено отношение разницы между теоретическими и экспериментальными данными от средней погрешности их определения. В качестве количественного показателя влияния случайной погрешности предло-*

*жено отношение неопределенности измерения экспериментальных данных к неопределенности измерения теоретических данных. Указанные показатели основано на предположении того, что теоретические и экспериментальные данные распределены нормально. Теоретическое распределение изменяется в пределах суммарной неопределенности измерения типа В, исследуемого параметра. Физическая суть показателя влияния методической погрешно-*

*сти – вероятность, с которой результаты измерения среднего значения показателя (определенного экспериментально) находятся в пределах возможного отклонения теоретического значения этого показателя.*

**Ключевые слова:** *неопределенность измерения, совпадение результатов, вероятность, случайная погрешность, методическая погрешность, теоретическое исследование.*